

# **Systeme du premier ordre et systemes à avance de phase**

**RSS - TP n°2**

Jean-Baptiste Théou

ENSICAEN - 1A ELEC

4 décembre 2009

# Chapitre 1

## Travail préparatoire

### 1.1 Question 1

#### 1.1.1 Système 1

Soit le système 1 décrit par l'équation  $G_1(p)$  :

$$G_1(p) = \frac{10}{p + 5}$$

C'est un système du premier ordre. L'équation standard d'un système du premier ordre est

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Avec

$$\begin{cases} K = \text{Le gain statique du système}^A \\ \tau = \text{La constante de temps} \end{cases}$$

On écrit  $G_1(p)$  sous la forme standard :

$$G_1(p) = \frac{2}{1 + 0.2p}$$

Le temps d'établissement à 5%, noté  $\tau_{5\%}$ , est défini par

$$\tau_{5\%} = 3 \cdot \tau$$

On obtient comme caractéristique du système

$$\begin{cases} K = 2 \\ \tau = 0.2 \text{ s} \\ \tau_{5\%} = 0.6 \text{ s} \end{cases}$$

---

<sup>A</sup>On peut aussi obtenir le gain statique en déterminant  $G(0)$ .

### 1.1.2 Système 2

Soit le système 2 décrit par l'équation  $G_2(p)$  :

$$G_1(p) = \frac{50}{p + 25}$$

On écrit  $G_2(p)$  sous la forme standard :

$$G_1(p) = \frac{2}{1 + \frac{1}{25}p}$$

On obtient comme caractéristique du système

$$\begin{cases} K = 2 \\ \tau = 4 \cdot 10^{-2} \text{ s} \\ \tau_{5\%} = 12 \cdot 10^{-2} \text{ s} \end{cases}$$

## 1.2 Question 2

Soit le système 5 décrit par  $G_5(P)$  :

$$G_5(p) = \frac{6(p + 1)}{p + 6}$$

On reconnaît la forme de la fonction de transfert d'un système à avance de phase, dont le prototype est

$$G(p) = K \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$$

C'est donc un système à avance de phase. On écrit  $G_5(p)$  sous la forme du prototype :

$$G_5(p) = \frac{1 + p}{1 + \frac{1}{6}p}$$

Par identification, on obtient les caractéristiques suivantes pour  $G_5(p)$  :

$$\begin{cases} a\tau = 1 \\ \tau = \frac{1}{6} \text{ s} \end{cases}$$

On obtient donc

$$a = 6$$

### 1.2.1 Question 1

**Gain statique**

Par identification, on obtient :

$$K = 1$$

### Phase et pulsation maximale

En partant du prototype, on obtient que la phase,  $\phi$ , du système est défini par :

$$\phi = \arctan(a\tau\omega) - \arctan(\tau\omega)$$

On recherche la phase maximale, donc la phase tel que  $\frac{d\phi}{d\omega} = 0$ . On dérive<sup>A</sup>  $\phi$  pour rechercher la pulsation maximale associé,  $\omega_m$  :

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{d\omega} &= \frac{a\tau}{1 + a^2\tau^2\omega_m^2} - \frac{\tau}{1 + \tau^2\omega_m^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

En simplifiant, on obtient :

$$\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$$

D'après l'expression de  $\phi$ , on obtient pour  $\phi_m$  :

$$\phi_m = \arctan(\sqrt{a}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

### Application numérique

Dans notre cas,  $a = 6$  :

$$\begin{cases} \omega_m = 2.45 \text{ rad.s}^{-1} \\ \phi_m = 45.58^\circ \end{cases}$$

### 1.2.2 Question 2

On va calculer  $G_5(p) - 3.5$  :

$$\begin{aligned}G_5(p) - 3.5 &= \frac{6(p+1)}{p+6} - 3.5 \\ &= \frac{6p+6 - 3.5p - 21}{p+6} \\ &= \frac{2.5(p-6)}{p+6} \\ &= \frac{2.5(p-6)^2}{p^2 - 36}\end{aligned}$$

---

<sup>A</sup>La dérivée de arctan est donnée par :  $\arctan'(x) = \frac{x'}{1+x^2}$ .

Or par définition,  $p = j\omega$ . Donc

$$\begin{aligned} G_5(j\omega) - 3.5 &= -\frac{2.5(-\omega^2 - 12j\omega + 36)}{\omega^2 + 36} \\ &= \frac{2.5(\omega^2 + 12j\omega - 36)}{\omega^2 + 36} \\ &= \frac{2.5}{\omega^2 - 36}\omega^2 + 36 + j\frac{2.5 \cdot 12\omega}{36 + \omega^2} \\ &= \operatorname{Re}(G(j\omega)) + \operatorname{Im}(G(j\omega)) \end{aligned}$$

On se place dans le plan de Nyquist. On exprime donc  $\operatorname{Re}$  en fonction de  $\operatorname{Im}$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(G(j\omega))^2 + \operatorname{Im}(G(j\omega))^2 &= \frac{6.25((\omega^2 - 36)^2 + (12\omega)^2)}{(36 + \omega^2)^2} \\ &= \frac{6.25(\omega^4 - 72\omega^2 + 36^2 + 144\omega^2)}{(36 + \omega^2)^2} \\ &= \frac{6.25(\omega^4 + 72\omega^2 + 36^2)}{(36 + \omega^2)^2} \\ &= \frac{6.25(36 + \omega^2)^2}{(36 + \omega^2)^2} \\ &= 6.25 \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation d'un cercle de rayon  $\sqrt{6.25} = 2.5$ . On obtient donc que le diagramme de Nyquist du système est un demi-cercle de centre  $(3.5; 0)$  et de rayon 2.5. De plus  $\operatorname{Re}$  et  $\operatorname{Im}$  sont tous les deux positifs, on se trouve donc dans le premier quadrant du plan de Nyquist.

### 1.2.3 Question 3

On considère un système à avance de phase. On a donc une fonction de transfert de la forme :

$$G(p) = K \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$$

On recherche un système avec les caractéristiques suivantes :

$$\begin{cases} \phi_m = 60^\circ \\ \omega_m = 10 \text{ rad.s}^{-1} \\ K = 2 \end{cases}$$

Dans le cas d'un système à avance de phase, nous avons :

$$\sin(\phi_m) = \frac{a - 1}{a + 1}$$

D'ou :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sin(\phi_m) + 1}{\sin(\phi_m) - 1} \\ &= 13.9 \end{aligned}$$

Nous l'avons vu dans la question précédente

$$\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$$

D'ou

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\omega_m\sqrt{a}} \\ &= 2.7 \cdot 10^{-2} \text{ s} \end{aligned}$$

Et on pose  $K = 2$ . On obtient que la fonction de transfert est

$$G(p) = 2 \frac{1 + 37.53 \cdot 10^{-2} p}{1 + 2.7 \cdot 10^{-2} p}$$