Mathématiques : TD n°1

Jean-Baptiste Théou

14 décembre 2009

Chapitre 1

Exercice n°1

Soit x le signal défini par

$$x : t \to te^{-t}e(t)$$

Avec $e(t)$ l'échelon unité[A].

1.1 Question 1

On souhaite montrer que le signal x possède une transformée de Fourier. On va donc montrer que $x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Utilisons le critère sur la convergence en $+\infty$:

$$\begin{aligned} t^2x(t) &= t^3e^{-t} \\ &\underset{t\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

On obtient donc que $x(t)$ est intégrable[B] sur $[0, \infty[$. De plus :

$$\forall t \in]-\infty, 0[, \; x(t) = 0$$

Donc x est intégrale sur $\mathbb{R}$, le signal appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Il possède donc une transformée de Fourier.

[A] C'est à dire : $e(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t > 0 \end{cases}$. e est non défini en 0 mais borné.

[B] Il n'y a pas de problème en 0 car e est borné en 0.

1.2 Question 2

1.2.1 Première méthode - Calcul direct

Par définition :

$$\begin{aligned}
\mathcal{TF}(x(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-j2\pi ft-t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t(1+j2\pi f}dt \\
&= \left[-\frac{e^{-t(1+j2\pi ft)}}{1+j2\pi f}t\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{1+j2\pi f}\int_0^{+\infty} e^{-t(1+j2\pi f)}dt \\
&= 0 - \frac{1}{(1+j2\pi f)^2}[e^{-t(1+j2\pi f)}]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{(1+j2\pi f)^2}
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
X(f) &= \mathcal{TF}(x(t)) \\
&= \frac{1}{(1+j2\pi f)^2}
\end{aligned}$$

1.2.2 Seconde méthode - Calcul indirect

La dérivée du signal est donnée par

$$x'(t) = e^{-t}(1-t)$$

Appliquons la transformée de Fourier à la dérivée.

$$\begin{aligned}
\mathcal{TF}(x'(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-t)e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-j2\pi ft-t}dt - \int_0^{+\infty} te^{-j2\pi ft-t}dt \\
&= \frac{1}{j2\pi f+1} - \mathcal{TF}(x(t))
\end{aligned}$$

Or

$$\mathcal{TF}(x'(t)) = j2\pi f\mathcal{TF}(x(t))$$

D'où

$$X(f) = \frac{1}{(1+j2\pi f)^2}$$

1.3 Question 3

La grandeur $\int_{\mathbb{R}} x(t)^2 dt$ représente l'énergie du signal. On obtient pour cette énergie :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt &= \int_0^{+\infty} t^2 e^{-2t} dt \\
&= \left[\frac{e^{-2t}}{-2} t^2\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} t e^{-2t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} t e^{-2t} \\
&= \left[\frac{e^{-2t}}{-2} t\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{2} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{2} dt \\
&= \left[\frac{e^{-2t}}{-4}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

On obtient que le signal x est à énergie finie. D'après le théorème de Parseval-Plancherel[C], on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 = \frac{1}{4}$$

1.4 Question 4

Pour représenter le spectre de $X(f)$, on calcule le module et l'argument de $X(f)$.

[C] Qui dit que $E = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2$. C'est un théorème de conservation de l'énergie entre le temporel et le fréquentiel.

Chapitre 2

Exercice n°2

Soit x le signal défini par

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow [e^{-\alpha t}\cos(2\pi f_0 t)]e(t) \end{aligned}$$

2.1 Question 1

On va calculer directement la transformée de Fourier.

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}(x(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi f t}dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right)e^{-j2\pi f t}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t + j2\pi(f_0 - f)t} + e^{-\alpha t - j2\pi(f_0+f)t} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-\alpha t + j2\pi(f_0-f)t}}{-\alpha + j2\pi(f_0 - f)} + \frac{e^{-\alpha t - j2\pi(f_0+f)t}}{-\alpha - j2\pi(f_0+f)}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha - j2\pi(f_0 - f)} + \frac{1}{\alpha + j2\pi(f_0+f)}\right) \\ &= \frac{\alpha + j2\pi f}{\alpha^2 + 4\alpha j\pi f - 4\pi^2(f^2 - f_0^2)} \end{aligned}$$

2.2 Question 2

Nous allons calculer de façon indirect la transformée de Fourier du signal x.

2.2.1 Premier point

Introduisons le signal $y(t)$ défini par

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\to e^{-\alpha t} e(t) \end{aligned}$$

Calculons la transformée de Fourier du signal y :

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}(y(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-t(\alpha + j2\pi f)dt} \\ &= \frac{1}{\alpha + j2\pi f} \\ &= Y(f) \end{aligned}$$

2.2.2 Second point

Nous avons la propriété suivante sur les transformées de Fourier :

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}(\cos(2\pi f_0 t) y(t)) &= \frac{1}{2}(Y(f - f_0) + Y(f + f_0)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha + j2\pi(f - f_0)} + \frac{1}{\alpha + j2\pi(f + f_0)}\right) \\ &= \frac{\alpha + 2j\pi f}{\alpha^2 + \alpha j2\pi(f + f_0) + \alpha j2\pi(f - f_0) - 4\pi^2(f^2 - f_0^2)} \\ &= \frac{\alpha + 2j\pi f}{\alpha^2 + 4\alpha j\pi f + 4\pi^2(f^2 - f_0^2)} \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat de la question 1.

Chapitre 3

Exercice n°3

Soit rect le signal défini par

$$\begin{aligned} \text{rect} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\to \begin{cases} 1 \text{ si } t \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Ce signal est non défini en $\pm\frac{1}{2}$, mais borné.

3.1 Question 1

Nous alons calculer directement la transformée de Fourier du signal.

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}(\text{rect}(t)) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= -\frac{1}{j2\pi f} [e^{-j2\pi ft}]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sin_c(\pi f) \end{aligned}$$

3.2 Question 2

En utilisant la propriété de changement d'échelle, on obtient que :

$$\mathcal{TF}(\text{rect}\left(\frac{t}{a}\right)) = a \sin_c(\pi f a)$$

3.3 Question 3

Soit z le signal défini par

$$\begin{aligned} z(t) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\to \begin{cases} 1 \text{ si } t \in]t_1, t_2[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Ce signal est non défini en t_1 et t_2 mais borné. On cherche à exprimer z en façon de rect. Pour ce faire, il faut tout d'abord repositionner le zéro, pour que z soit centré autour du nouveau zéro[A]. En suite, on fait un changement d'échelle pour que la largeur du signal rectangulaire soit égale à 1[B]. Au final, on obtient que

$$z(t) = \text{rect}\left(\frac{t - \dfrac{t_1 + t_2}{2}}{t_2 - t_1}\right)$$

On connait la transformée de Fourier du signal rect, qui est donnée par $\sin_c(\pi f)$. On va utiliser les propriétés de la transformée pour obtenir celle de z d'après celle de rect. Appliquons tout d'abord le théorème du retard[C] :

$$\mathcal{TF}(\text{rect}\left(t - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)) = e^{-j\pi f(t_1+t_2)} \sin_c(\pi f)$$

On applique ensuite le théorème de changement d'échelle, rappelé précédement, et on obtient que

$$\mathcal{TF}(z(t)) = (t_1 - t_2)e^{-j\pi f(t_1^2 - t_2^2} \sin_c(\pi f(t_1 - t_2))$$

[A] Car rect est centré autour de 0.
[B] Car la largeur du signal rect est 1.
[C] $\mathcal{TF}(x(t - t_0)) = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$.

Chapitre 4

Exercice 4

Soit x le signal défini par

$$\begin{aligned} x(t) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\to \begin{cases} 2t \text{ si } t \in \left] \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

4.1 Question 1

Pour calculer sa transformée de Fourier, nous allons réaliser une intégration par partie

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}(x(t)) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2te^{-j2\pi ft}dt \\ &= \left[2t\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{j2\pi f} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \sin_c(\pi f) + \frac{2}{j2\pi f} \sin_c(\pi f) \\ &= \sin_c(\pi f)(1 + \frac{2}{j2\pi f}) \end{aligned}$$

4.2 Question 2

Le signal est impaire. On devrait obtenir que X est aussi impaire et imaginaire ... Ce qui n'est pas le cas ici.