

## Semaine 2 - Corrigé

Par David Morin, traduit par Jean-Baptiste Théou

Version originale : 23 septembre 2002

### Les dragons au yeux verts

Commençons avec un petit nombre de dragons,  $N$ , à la place de la centaine, pour comprendre le problème.

Si  $N = 1$ , et que vous dites à ce dragons qu'au moins des dragons a les yeux verts, vous lui dites simplement qu'il a les yeux verts, donc il doit se transformer en moineau à minuit.

Si  $N = 2$ , nommons les dragons A et B. Après votre annonce qui dit que au moins un d'entre eux à les yeux verts, A doit penser : "Si je n'ai pas les yeux verts, alors B peut voir que je ne l'ai pas, donc B doit conclure qu'il doit avoir les yeux verts. Il doit donc se transformer en moineau au prochain minuit." Mais alors, si B ne se transforme pas en moineau au prochain minuit, alors le jour suivant A doit conclure que c'est lui qui a les yeux vert, et donc qu'il va se transformer en moineau au second minuit qui suit la révélation. Le même processus est réalisé par B, donc ils seront transformé en moineau le second minuit qui suit la révélation.

Si  $N = 3$ , appelons les dragons A,B et C. Après l'annonce, C doit penser "Si je n'ai pas les yeux vert, alors A et B peuvent voir qu'ils ne sont pas verts, ils peuvent utiliser le raisonnement pour la situation  $N=2$ , dans quels cas ils se transformerons en moineau au second minuit." Mais si A et B ne se transforme par en moineau au second minuit, alors le troisième jour, C doit conclure qu'il a les yeux verts, et donc qu'il va se transformer en moineau au troisième minuit. Le même processus doit être effectué par A et B, donc ils se transformerons tous en moineau le troisième minuit. Le résultat et le raisonnement semble maintenant claire. Démontrons le :

**Proposition** : Considérons  $N$  dragons, tous possédant des yeux verts. Si vous annoncez à chacun d'entre eux qu'au moins un d'entre eux possède les yeux verts, ils doivent se transformer en moineau au  $N$ -ème minuit.

**Preuve** : Nous allons le prouver par récurrence. Nous supposons le résultat vrai pour  $N$  dragons, et nous allons regarder si il est vrai pour  $N+1$  dragons. Nous avons initialisé la récurrence pour  $N=1,2,3$ .

Considérons  $N+1$  dragons, et sélectionnons un d'entre eux. Appelons-le A. Après l'annonce, il doit penser : "Si je n'ai pas les yeux verts, alors les  $N$  autres dragons peuvent le voir, donc ils peuvent utiliser le raisonnement valable pour  $N$  dragons, dans quels cas ils se transformerons en moineau le  $N$ -ème minuit". Mais si ils ne se sont pas tous transformé au  $N$ -ème minuit, alors le  $N+1$ -ème jour, A doit conclure lui même qu'il doit avoir les yeux verts, et donc il se transformera en moineau le  $N+1$ -ème minuit. Le même processus est effectué par les  $N$  autres dragons, donc ils se transformerons tous en moineau le  $N+1$ -ème minuit.

Au final, dans notre problème, les 100 dragons se transformeront en moineau le 100-ème minuit qui suit la révélation.

Même si nous avons résolu le problème, nous pouvons être troublé par le fait que cette information qui semble inutile a une repercussion majeure. Comment cela est possible, alors que nous sommes sûr que tous les dragons savaient déjà ce que nous avons annoncé ? Leurs a-t-on donné une nouvelle information ? La réponse est "oui". Regardons quelle est cette nouvelle information.

Considérons le cas  $N=1$ . Il est clair que nous avons fourni une nouvelle information, en disant au final à l'unique dragon qu'il a les yeux verts. Mais pour le cas  $N \geq 2$ , la nouvelle information est un peu plus subtile.

Considérons le cas  $N=2$ . Avant notre annonce, A savait que B a les yeux verts, et B savait que A a les yeux verts. Ceci est l'étendu de leurs connaissances, et ils ne peuvent rien conclure à partir de ceci. Mais après vous leurs avez dit qu'au moins un d'entre eux a les yeux verts, alors A sait deux choses : Il sait que B a les yeux verts et que B sait qu'il y a au moins un dragons avec les yeux verts (Car A sait que B a entendu votre annonce). B possède aussi une seconde information similaire. Cette seconde information est cruciale, nous avons pu le voir dans le raisonnement pour  $N=2$ .

Considérons le cas  $N=3$ . A sait que B a les yeux verts, et il sait aussi que B sait qu'il y a au moins un dragons avec les yeux verts (Car A peut voir que B peut voir C ). Alors les deux bits d'information dans le cas  $N=2$  sont déjà connus avant l'annonce. Quelle est alors la nouvelle information donnée par le discours ? Seulement après notre discours il est vrai que A sait que B sait que C sait qu'il y a au moins un dragons au yeux verts.

Il y a un résultat analogue pour le cas N. Il n'y a pas de paradoxe ici. Votre discours amène une information. Une information plus importante est ajoutée dans le monde que celle que vous avez fournie. Et il apparaît, nous l'avons vu dans la proposition 1, que cette nouvelle est suffisante pour permettre à tous les dragons de connaître la couleur de leurs yeux.

Pour résumer : Avant votre annonce, l'état suivant est vrai pour N dragons :  $A_1$  sait que  $A_2$  sait que ... que  $A_{N-2}$  sait que  $A_{N-1}$  sait qu'il y a au moins un dragons avec les yeux verts. Ceci est vrai car  $A_{N-1}$  peut voir  $A_N$  ; et que  $A_{N-2}$  peut voir que  $A_{N-1}$  peut voir  $A_N$  ; et ainsi de suite jusqu'à que  $A_1$  peut voir que  $A_2$  peut voir que ... que  $A_{N-1}$  peut voir  $A_N$ . Le même résultat peut être obtenu pour tous groupes de  $N-1$  dragons. C'est seulement à l'aide de notre discours que la chaîne est étendue jusqu'à l'étape finale du N-ème dragons. Le fait que le N-ème dragons ait entendu votre annonce est crucial pour que la chaîne d'information soit complète.

Donc, pour finir, l'élément le plus important est de savoir jusqu'au va la chaîne "A sait que B sait que C sait que ..."

Remarquons que si un dragons manque lors de l'annonce (qui devient : "Au moins un des 100 dragons de l'île a les yeux verts"), alors ils resteront d'heureux dragons au travers des âges.