Systèmes du second ordre et effets des zéros d'un système

RSS

Jean-Baptiste Théou

ENSICAEN - 1A ELEC

3 décembre 2009

Chapitre 1

Travail préparatoire

On considère deux systèmes définit par

$$G_6(p) = \frac{50}{p^2 + 2p + 25} \quad G_7(p) = \frac{50}{p^2 + 4p + 25}$$

1.1 Question 1

1.1.1 Système G_6

La forme fondamentale d'un système du second ordre est :

$$G(p) = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

Détermination des pôles

Le discriminent du dénominateur est donné par :

$$\begin{aligned}\Delta &= 4 - 4 \cdot 25 \\ &= 4(1 - 25) \\ &= -96 \\ &= i^2 96\end{aligned}$$

On obtient donc pour les pôles p_1 et p_2

$$\begin{aligned}p_1 &= \frac{-2 + i\sqrt{96}}{2} \\ &= -1 + 2i\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_2 &= \frac{-2 - i\sqrt{96}}{2} \\
&= -1 - 2i\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

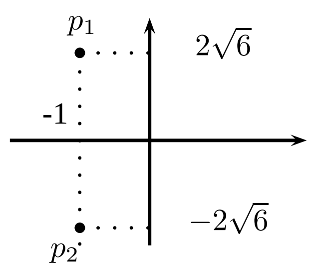

Fig. 1.1 – Pôles dans le plan complexe

Caractéristiques du système

Par identification avec la forme classique, on obtient

$$
\begin{cases}
\omega_0 = 5 \\
k = 2 \\
\xi = \dfrac{1}{5}
\end{cases}
$$

1.1.2 Système G_7

Détermination des pôles

Le discriminent du dénominateur est donné par :

$$
\begin{aligned}
\Delta &= 16 - 4 \cdot 25 \\
&= 4(4 - 25) \\
&= -84 \\
&= i^2 84
\end{aligned}
$$

On obtient donc pour les pôles p_1 et p_2

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{-4 + i\sqrt{84}}{2} \\
&= -2 + i\sqrt{21}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_2 &= \frac{-4 - i\sqrt{84}}{2} \\
&= -2 - i\sqrt{21}
\end{aligned}
$$

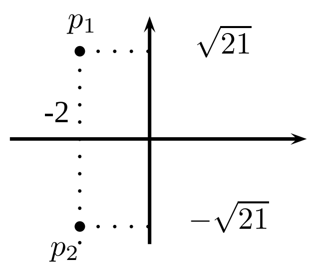

Fig. 1.2 – Pôles dans le plan complexe

Caractéristique du système

Par identification on obtient

$$\begin{cases} \omega_0 = 5 \\ k = 2 \\ \xi = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

1.2 Question 2

Par définition, nous avons :

$$\begin{cases} \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} : \text{ La pulsation de résonnance} \\ D = \exp\left[\dfrac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right] : \text{ Le premier dépassement} \\ t_D = \dfrac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} : \text{ Le temps ou l'on obtient le premier dépassement} \end{cases}$$

1.2.1 Système G_6

On obtient pour ce système :

$$\begin{aligned} \omega_r &= \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \\ &= 5\sqrt{1 - \frac{2}{25}} \\ &= \sqrt{23} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D &= \exp\left[\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right] \\
&= \exp\left[\frac{-\pi}{5\sqrt{1-\frac{1}{25}}}\right] \\
&= \exp\left[\frac{-\pi}{\sqrt{24}}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_D &= \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \\
&= \frac{\pi}{5\sqrt{1-\frac{1}{25}}} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{24}}
\end{aligned}
$$

1.2.2 Système G_7

On obtient pour ce système :

$$
\begin{aligned}
\omega_r &= \omega_0\sqrt{1-2\xi^2} \\
&= 5\sqrt{1-\frac{8}{25}} \\
&= \sqrt{17}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= \exp\left[\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right] \\
&= \exp\left[\frac{-2\pi}{5\sqrt{1-\frac{4}{25}}}\right] \\
&= \exp\left[\frac{-2\pi}{\sqrt{21}}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_D &= \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \\
&= \frac{\pi}{5\sqrt{1-\frac{4}{25}}} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{21}}
\end{aligned}
$$

1.3 Question 3

Par définition, dans le cas d'un second ordre, nous avons

$$G(p) = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

En fréquentiel :

$$G(j\omega) = \frac{k\omega_0^2}{-\omega^2 + 2j\xi\omega_0\omega + \omega_0^2}$$

D'où :

$$\begin{aligned} G(j\omega_0) &= \frac{k\omega_0^2}{-\omega_0^2 + 2j\xi\omega_0^2 + \omega_0^2} \\ &= \frac{k\omega_0^2}{2j\xi\omega_0^2} \\ &= \frac{k}{2j\xi} \\ &= -j\frac{k}{2\xi} \end{aligned}$$

On obtient donc que ξ s'exprime très simplement en fonction de $G(j\omega_0)$.

1.4 Question 4

On considère la fonction de transfert suivante, qui représente un système à avance (ou retard) de phase :

$$G_u(p) = \frac{1 + \mathrm{T}_{\mathrm{d2}}p}{1 + \mathrm{T}_{\mathrm{d1}}p}$$

La réponse indicielle est donnée par[A] :

$$\begin{aligned} G_a(p) &= \frac{1 + \mathrm{T}_{\mathrm{d2}}p}{1 + \mathrm{T}_{\mathrm{d1}}p} \cdot \frac{1}{p} \\ &= \frac{1}{1 + \mathrm{T}_{\mathrm{d1}}p} \cdot \frac{1}{p} + \frac{\mathrm{T}_{\mathrm{d2}}p}{1 + \mathrm{T}_{\mathrm{d1}}p} \cdot \frac{1}{p} \\ &= \frac{1}{1 + \mathrm{T}_{\mathrm{d1}}p} \cdot \frac{1}{p} + \frac{\mathrm{T}_{\mathrm{d2}}}{1 + \mathrm{T}_{\mathrm{d1}}p} \\ &= G_{a1}(p) + G_{a2}(p) \end{aligned}$$

Par définition, le théorème du résidu nous dis que

$$\operatorname*{Res}_{p_i}(Y(p)e^{pt}) = \frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}}(p - p_i)^k Y(p)e^{pt}\right]_{p=p_i}$$

Avec k la multiplicité du pôle p_i.

[A] Car dans Laplace, la réponse indicielle est $\frac{1}{p}$.

1.4.1 La fonction $G_{a_1}(p)$

Les deux pôles de $G_{a_1}(p)$ sont

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{-1}{\mathrm{T_{d1}}} \\ p_2 = 0 \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{p_1}(G_{a_1}(p)e^{pt}) &= \left[\left(p + \frac{1}{\mathrm{T_{d1}}}\right)\frac{1}{(1+\mathrm{T_{d1}p})p}e^{pt}\right]_{p=\frac{-1}{\mathrm{T_{d1}}}} \\
&= \left[\frac{1}{\mathrm{T_{d1}}p}e^{pt}\right]_{p=\frac{-1}{T_{d1}}} \\
&= -e^{\frac{-t}{\mathrm{T_{d1}}}}
\end{aligned}$$

Pour le second pôle :

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{p_2}(G_{a_1}(p)e^{pt}) &= \left[\frac{p}{(1+\mathrm{T_{d1}}p)p}e^{pt}\right]_{p=0} \\
&= \left[\frac{1}{1+\mathrm{T_{d1}}}e^{pt}\right]_{p=0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

1.4.2 La fonction $G_{a_2}(p)$

Le pôle de $G_{a_2}(p)$ est

$$p_3 = \frac{-1}{\mathrm{T_{d1}}}$$

D'ou

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{p_3}(G_{a_2}(p)e^{pt}) &= \left[\frac{\mathrm{T_{d1}}p+1}{\mathrm{T_{d1}}}\frac{\mathrm{T_{d2}}}{\mathrm{T_{d1}}p+1}e^{pt}\right]_{p=\frac{-1}{\mathrm{T_{d1}}}} \\
&= \frac{\mathrm{T_{d2}}}{\mathrm{T_{d1}}}e^{\frac{-t}{\mathrm{T_{d1}}}}
\end{aligned}$$

1.4.3 Résultat de la réponse indicielle

Soit $x(t)$ le résultat de la réponse indicielle. On obtient

$$\begin{aligned}
x(t) &= \operatorname*{Res}_{p_1}(G_{a_1}(p)e^{pt}) + \operatorname*{Res}_{p_2}(G_{a_1}(p)e^{pt}) + \operatorname*{Res}_{p_3}(G_{a_2}(p)e^{pt}) \\
&= 1 - e^{\frac{-t}{\mathrm{T_{d1}}}} + \frac{\mathrm{T_{d2}}}{\mathrm{T_{d1}}}e^{\frac{-t}{\mathrm{T_{d1}}}} \\
&= 1 + e^{\frac{-t}{\mathrm{T_{d1}}}}\left(\frac{\mathrm{T_{d2}}}{\mathrm{T_{d1}}} - 1\right)
\end{aligned}$$