Mécanique quantique : TD n°4

Jean-Baptiste Théou

16 novembre 2009

Table des matières

Chapitre 1

Marche de potentiel

On considère une particule de masse m et d'énergie E > 0 se déplaçant dans un espace à une dimension. Cette particule arrive de la région $x = -\infty$ sur une marche de potentiel située en $x = 0$. On divise donc l'espace en deux régions :

$$\begin{cases} x < 0 : \ V = 0 \text{ Région I} \\ x > 0 : \ V = V_0 \text{ Région II} \end{cases}$$

1.1 Question 1

On se place dans la région I. On recherche les solutions stationnaires. La fonction d'onde doit donc vérifier l'équation de Schrodïnger indépendante du temps :

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V\psi(x) = E\psi(x)$$

Qui s'écrit aussi :

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi(x) = 0$$

1.1.1 Cas pour $E > V_0$

Dans la région I, $V = 0$. Posons :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

L'équation de Schrodïnger devient donc dans ce cas

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + k^2\psi(x) = 0$$

On obtient donc

$$\phi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

On obtient la même équation pour $E < V_0$

1.2 Question 2

On se place dans la région II. L'équation de Schrodïnger est :

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi(x) = 0$$

1.2.1 Cas pour $E > V_0$

On pose $k' = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$. L'équation devient :

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + k'^2 \psi(x) = 0$$

On obtient donc

$$\phi_{II}(x) = Ce^{ik'x} + De^{-ik'x}$$

Sachant qu'il n'y a pas particule venant de $+\infty$, $D = 0$.

1.2.2 Cas pour $E < V_0$

On pose $\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$. L'équation devient :

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + \alpha^2 \psi(x) = 0$$

On obtient donc

$$\phi_{II}(x) = Ee^{\alpha x} + Fe^{-\alpha x}$$

Sachant qu'il n'y a pas particule venant de $+\infty$, $F = 0$.

1.3 Question 3

1.3.1 Cas pour $E > V_0$

Dans ce cas, nous avons les équations suivantes :

$$\begin{cases} \phi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ \phi_{II}(x) = Ce^{ik'x} \end{cases}$$

Continuité de la fonction d'onde

La continuité de la fonction d'onde en $x = 0$ nous donne que

$$A + B = C$$

Continuité de la dérivée de la fonction d'onde

La continuité de la dérivée de la fonction d'onde en $x = 0$ nous donne que

$$A - B = \frac{k'}{k}C$$

1.3.2 Cas pour $E < V_0$

Dans ce cas, nous avons les équations suivantes :

$$\begin{cases} \phi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ \phi_{II}(x) = Ce^{\alpha x} \end{cases}$$

Continuité de la fonction d'onde

La continuité de la fonction d'onde en $x = 0$ nous donne que

$$A + B = C$$

Continuité de la dérivée de la fonction d'onde

La continuité de la dérivée de la fonction d'onde en $x = 0$ nous donne que

$$A - B = \frac{\alpha}{ik}C$$

1.4 Question 4

Par définition, le courant de probabilité est définit par

1.4.1 Cas pour $E < V_0$

Région I