

Mécanique quantique : TD n°3

Jean-Baptiste Théou

16 novembre 2009

Table des matières

| | | |
|----------|-----------------------------|----------|
| 1 | Paquet d'onde carrée | 2 |
| 1.1 | Question 1 | 2 |
| 1.1.1 | Question a | 2 |
| 1.1.2 | Question b | 3 |
| 1.1.3 | Question c | 3 |
| 1.2 | Question 2 | 4 |
| 1.2.1 | Question a | 4 |
| 1.2.2 | Question b | 4 |
| 1.3 | Question 3 | 5 |
| 1.3.1 | Question a | 5 |
| 1.3.2 | Question b | 6 |

Chapitre 1

Paquet d'onde carrée

1.1 Question 1

On considère un paquet d'onde $\psi(x, t)$ défini par

$$\psi(x, t) = \int g(k) e^{i(\omega t - kx)} dk$$

Avec

$$g(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k_0 - \frac{\Delta k}{2} \leq k \leq k_0 + \frac{\Delta k}{2} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

1.1.1 Question a

On obtient avec la définition de $g(k)$ que

$$\psi(x, t) = \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} e^{i(\omega t - kx)} dk$$

De plus, la pulsation ω est une fonction de k donnée par

$$\omega(k) = \omega_0 + v_g(k - k_0)$$

Avec v_g la vitesse de groupe. En remplaçant dans l'intégrale on obtient :

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) &= \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} e^{i(\omega_0 t + v_g k t - v_g k_0 t - k x)} dk \\
&= \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} e^{i(\omega_0 t - v_g k_0 t + k(v_g t - x))} dk \\
&= \left[\frac{e^{i(\omega_0 t - v_g k_0 t + k(v_g t - x))}}{i(v_g t - x)} \right]_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} \\
&= e^{it(\omega_0 - v_g k_0)} \left[\frac{e^{ik(v_g t - x)}}{i(v_g t - x)} \right]_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} \\
&= \frac{e^{it(\omega_0 - v_g k_0)}}{i(v_g t - x)} e^{ik_0(v_g t - x)} \left(e^{-i(v_g t - x)\frac{\Delta k}{2}} - e^{i(v_g t - x)\frac{\Delta k}{2}} \right) \\
&= -\frac{e^{it(\omega_0 - v_g k_0)}}{v_g t - x} 2 \sin(v_g t - x) \frac{\Delta k}{2} \\
&= -e^{it(\omega_0 - v_g k_0)} \frac{\text{sin}_c((v_g t - x)\frac{\Delta k}{2})}{\Delta k}
\end{aligned}$$

1.1.2 Question b

Par définition, la densité de probabilité de présente à l'instant t est donné par :

$$|\psi(x, t)|^2$$

À l'instant $t = 0$ on obtient donc

$$|\psi(x, 0)|^2 = \frac{\text{sin}_c^2(-x\frac{\Delta k}{2})}{\Delta k^2}$$

Le maximum de la fonction est atteint pour $x = 0$ et la densité de probabilité s'annule pour

$$x = \frac{2n\pi}{\Delta k}$$

1.1.3 Question c

D'après la question b, on peut dire que la particule est localisé^A autour de $x = 0$. En première approximation on prend comme largeur du paquet d'onde Δx , la largeur du lobe principale centré. Δx est la zone comprise entre les deux premières annulations de la fonction de part et d'autre de $x = 0$. C'est donc pour $n = 2$.

$$\Delta x = \frac{4\pi}{\Delta k}$$

^ACependant, la probabilité n'est pas nulle ailleurs.

1.2 Question 2

1.2.1 Question a

Le plan d'onde de probabilité maximum est le plan pour lequel $|\psi(x, t)|^2$ est maximum. Soit $x_m(t)$ la position de ce plan d'onde^B.

$$|\psi(x_m(t), t)|^2 = \frac{\sin^2(v_g t - x_m(t) \frac{\Delta k}{2})}{\Delta k^2}$$

On obtient donc que le maximum est obtenu pour

$$x_m = v_g t$$

D'où :

$$dv_m = v_g dt$$

On obtient

$$v_g = \frac{dx_m}{dt}$$

La vitesse de groupe décrit donc bien le déplacement du plan d'onde pour lequel l'amplitude de probabilité de probabilité maximum.

1.2.2 Question b

D'après les relations de Planck-Einstein, on obtient

$$\begin{cases} dE = \hbar d\omega \\ dp = \hbar dk \end{cases}$$

Dans le cas relativiste, nous avons

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Par définition :

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{d\omega}{dk} \\ &= \frac{dE}{dp} \\ &= \frac{pc^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} \\ &= \frac{pc^2}{E} \end{aligned}$$

^B À $t=0$, $x_m(0) = 0$.

Nous avons aussi dans le cas relativiste^C les relations suivantes :

$$\begin{cases} E = \gamma mc^2 \\ p = \gamma mv \end{cases}$$

Avec γ le facteur de Lorentz :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Et β la vitesse réduite :

$$\beta = \frac{v}{c}$$

D'où :

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{\gamma m v c^2}{\gamma m c^2} \\ &= v \end{aligned}$$

La vitesse de groupe s'identifie donc à la vitesse de la particule associée au paquet d'onde.

1.3 Question 3

1.3.1 Question a

On considère que le paquet d'onde représente un photon. Soit τ le temps correspondant à la durée de passage de la particule en un point quelconque.

$$\tau = \frac{\Delta x}{v_g}$$

Dans le cas d'un photon, donc d'une particule non massive, on obtient que $v_g = c$. D'après la question I) c), qui nous donne l'expression de Δx , on obtient :

$$\tau = \frac{4\pi}{c\Delta k}$$

Par définition

$$E = \hbar\omega$$

D'où :

$$\Delta E = \hbar\Delta\omega$$

Et d'après l'expression de la vitesse de groupe

$$\Delta E = \hbar c\Delta k$$

On obtient donc que

$$\tau\Delta E = 2\hbar$$

$\tau\Delta E$ est donc que l'ordre de la constante de Planck.

^COn retrouve bien le cas classique quand $v \ll c$.

1.3.2 Question b

On considère maintenant un électron de vitesse v , avec v une vitesse relativiste. Dans ce cas

$$\begin{aligned}v_g &= \frac{dE}{dp} \\ &= \frac{pc^2}{E}\end{aligned}$$

D'où :

$$\tau = \frac{4\pi E}{pc^2 \Delta k}$$

Dans ce cadre relativiste, nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{pc^2}{E} \Delta p \\ &= \frac{pc^2}{E} \hbar \Delta k\end{aligned}$$

D'où :

$$\tau \Delta E = 2\hbar$$