Physique statistique : TD n°2

Jean-Baptiste Théou

23 novembre 2009

Table des matières

Chapitre 1

Rappel : Espérence, variance et écart type

Soit N valeurs de T et n_i valeurs T_i. n_i est appelé la fréquence de T_i.

1.1 Espérence

L'espérence, noté $\bar{T}$ ou $< T >$, est définit par

$$\begin{aligned} < T > &= \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i T_i}{\sum_{i=1}^{N} n_i} \\ &= T_i P(T_i) \end{aligned}$$

Avec $P(T_i)$ la possibilité d'avoir T_i.

1.2 Variance

La variance, noté $V(T)$, est définit comme la moyenne des carrées des écarts à la moyenne. Elle représente la dispersion des valeurs autour de la moyenne.

$$\begin{aligned} V(T) &= \frac{\sum_{i=1}^{N} [T_i - < T >]^2}{n_i} \\ &= \bar{T^2} - (\bar{T})^2 \\ &= (T - \bar{T})^2 \end{aligned}$$

1.3 Écart type ou écart quadratique moyen

L'espérence, noté $\sigma(T)$, est définit par

$$\sigma(T) = \sqrt{V(T)}$$

Chapitre 2

TP n°2

On introduit les notations suivantes. Soit N le nombre totale de particules. Soit N_A le nombre de particule de l'enceinte A et N_B le nombre de particule de l'enceinte B. On s'intéresse aux valeurs de N_A et de N_B. Nous avons

$$N = N_A + N_B$$

2.1 Question 1

2.2 Question 2

Soit $n = \dfrac{N_A - N_B}{2}$. n représente l'écart autour de la moyenne. Les valeurs extrèmes de n sont

$$\begin{cases} n_{min} = \dfrac{-N}{2} \\ \\ n_{max} = \dfrac{N}{2} \end{cases}$$

Ces deux cas correspondent au cas extrème où toutes les particules sont soit des particules N_A, soit des particule N_B. Nous avons les relations suivantes liant N_A, N_B et n.

$$\begin{cases} N_B = \dfrac{N}{2} - n \\ \\ N_A = \dfrac{N}{2} + n \end{cases}$$

2.3 Question 3

n défini un état macroscopique, puisque N_A et N_B sont fixés. En effet, si on fixe N_A et N_B, donc n, on défini un système, donc un état macroscopique. Soit $\Omega(n)$ le nombre d'états microscopiques associé à chaque état macroscopique. $\Omega(n)$ correspond donc au nombre de façon possible de choisir[A] N_A particules parmis N

$$\begin{aligned}\Omega(n) &= C_N^{N_A} \\ &= \frac{N!}{N_A!(N-N_A)!} \\ &= \frac{N!}{N_A!N_B!} \\ &= \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}+n\right)!\left(\frac{N}{2}-n\right)!}\end{aligned}$$

2.4 Question 4

2.4.1 P(k)

On cherche à déterminer la probabilité de mesurer la valeur k pour n. Par définition :

$$P(k) = \frac{\Omega(k)}{\displaystyle\sum_i \Omega(i)}$$

On obtient :

$$\sum_i \Omega_i = \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}+i\right)!\left(\frac{N}{2}-i\right)!}$$

Effectuons le changement de variable $l = k + \dfrac{N}{2}$. On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_i \Omega_i &= \sum_{l=0}^{N} \frac{N!}{l!(N-l)!} \\ &= \sum_{l=0}^{N} C_N^l \\ &= 2^N\end{aligned}$$

On obtient donc que

$$P(k) = \frac{N!}{2^N\left(\frac{N}{2}+k\right)!\left(\frac{N}{2}-k\right)!}$$

[A] On peut très bien considérer N_B, on obtient le même résultat.

2.4.2 Valeur moyenne de n

Soit $P(n)$ la probabilité d'avoir la valeur n. La valeur moyenne de n, note $< n >$, est définit par

$$
\begin{aligned}
< n > &= \sum_{k=n_{min}}^{n_{max}} kP(k) \\
&= \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} kP(k) \\
&= \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{-1} kP(k) + 0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}
\end{aligned}
$$

Or $P(k) = P(-k)$. Dans la première somme, on pose $l = -k$. D'ou :

$$
\begin{aligned}
< n > &= -\sum_{l=1}^{\frac{N}{2}} lP(l) + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} kP(k) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

La valeur moyenne de n est donc nulle.

2.5 Question 5

On considère maintenant $N = 10^{23}$. On peut considérer dans ce cas n comme une variable continue. On pose

$$f(n) = \ln(P(n))$$

2.5.1 Question a

Nous avons

$$P(n) = \frac{N!}{2^N \left(\frac{N}{2} + n\right)! \left(\frac{N}{2} - n\right)!}$$

D'où :

$$f(n) = \ln(N!) - N\ln(2) - \ln\left(\left(\frac{N}{2} + n\right)!\right) - \ln\left(\left(\frac{N}{2} - n\right)!\right)$$

D'après la formule de Stirling :

$$\ln(N!) = N\ln(N) - N$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
f(n) &= N\ln(N) - N - N\ln(2) - \left[\left(\frac{N}{2} - n\right)\ln\left(\frac{N}{2} - n\right) - \frac{N}{2} + n\right] - \left[\left(\frac{N}{2} + n\right)\ln\left(\frac{N}{2} + n\right) - \frac{N}{2} - n\right] \\
&= N\ln(N) - \left(\frac{N}{2} - n\right)\ln\left(\frac{N}{2} - n\right) - \left(\frac{N}{2} + n\right)\ln\left(\frac{N}{2} + n\right) - N\ln(2)
\end{aligned}
$$

2.5.2 Question b

Par définition :

$$f(n) = f(0) + n \left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{n=0} + \frac{n^2}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}\right|_{n=0} + \frac{n^3}{6} \left.\frac{\partial^3 f}{\partial n^3}\right|_{n=0} + \frac{n^4}{24} \left.\frac{\partial^4 f}{\partial n^4}\right|_{n=0}$$

En développement, on obtient :

$$\begin{aligned} f(n) &= \ln(P(n)) \\ &= \ln(P(0)) - \frac{2n^2}{N} - \frac{4n^4}{3N^3} \end{aligned}$$

On obtient bien que le terme en n^4 est négligable, avec $N = 10^{23}$. En passant à l'exponentiel, on obtient

$$P(n) = P(0)e^{-\frac{2n^2}{N}}$$