Mécanique quantique : TD n°1

Jean-Baptiste Théou

13 novembre 2009

Table des matières

Chapitre 1

L'effet photoélectrique

1.1 Question 1

Voir la fiche de révision sur la mécanique quantique

1.2 Question 2

1.2.1 Question a

Soit E l'énergie d'un photon. Nous avons les relations

$$\begin{aligned} E &= h\nu \\ &= W + E_{e^-} \end{aligned}$$

La fréquence de coupure est donnée par :

$$\nu = \frac{W}{h}$$

La longeur d'onde de coupure est donc donnée par :

$$\lambda = \frac{hc}{W}$$

L'énergie du photon de longeur d'onde $\lambda = 400\ nm$ est :

$$\begin{aligned} E &= \frac{hc}{\lambda} \\ &= 4.97 \cdot 10^{-19}\ J \\ &= 3.11\ eV \end{aligned}$$

1.2.2 Question b

Les matériaux pouvant subir l'effet photoélectrique par ce photon doivent avoir un travail d'extraction inférieur à l'énergie E. La platine ne peut donc pas subir l'effet photoélectrique alors que la sodium et le césium si. Les électrons issus de l'effet photoélectrique ont pour énergie cinétique :

$$\begin{cases} E_{e^-_{Na}} = 0.65\ eV \\ E_{e^-_{Cs}} = 1.31\ eV \end{cases}$$

De plus, l'expression de l'énergie cinétique est

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

D'ou :

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Les vitesses associés à ces énergies sont

$$\begin{cases} v_{e^-_{Na}} = 478\ km.s^{-1} \\ v_{e^-_{Cs}} = 679\ km.s^{-1} \end{cases}$$

1.3 Question 3

Par définition, le potentiel d'arret est la valeur de la tension permettent d'annuler le courant, c'est à dire d'annuler l'énergie cinétique des électrons éjectés. On obtient donc que :

$$-eV_0 = -E_{e^-}$$

D'ou :

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{E_{e^-}}{e} \\ &= \frac{h\nu - W}{e} \end{aligned}$$

Le travail d'extraction est donc donné par :

$$\begin{aligned} W &= h\nu - eV_0 \\ &= \frac{hc}{\lambda} - eV_0 \end{aligned}$$

1.3.1 Question a

On considère une cellule photovoltaique, élairée par une lumière de longeur d'onde $\lambda = 546.1\ nm$. Le potentiel d'arrêt V_0 est de $1.7\ V$. Dans ce cas, on obtient que

$$\begin{aligned} W &= 0.91 \cdot 10^{-19}\ J \\ &= 0.57\ eV \end{aligned}$$

1.3.2 Question b

On considère maintenant une lumière de longeur d'onde $\lambda = 587.4\ nm$. Nous avons le travail d'extraction du matériau qui vaut $W = 0.57\ eV$. On obtient donc pour le potentiel d'arret :

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{h\nu - W}{e} \\ &= \frac{\frac{hc}{\lambda} - W}{e} \\ &= 20.56\ V \end{aligned}$$

Chapitre 2

Diffusion Compton

2.1 Question a

On considère un rayon X de longeur d'onde $\lambda = 0.708 \cdot 10^{-10}\ m$. On considère donc la collision entre un photon et un électron libre, que se trouve initialement au repos. Dans le cadre de la mécanique relativiste, l'énergie est donnée par

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

avec

$$\begin{cases} p: \text{ L'impulsion de la particule.} \\ c: \text{ La vitesse de la lumière.} \\ m: \text{ La masse de la particule.} \end{cases}$$

Dans le cas d'un photon, la masse m est nulle. On obtient donc que l'énergie d'un photon est donnée par

$$E = pc$$

On considère une collision élastique, il y a donc conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvemement. Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{cases} (E_x, p_x): \text{ L'énergie du photon incident et sa quantité de mouvement.} \\ (E'_x, p_x): \text{ L'énergie du photon diffusé et sa quantité de mouvement.} \\ (E_{e^-}, p_{e^-}): \text{ L'énergie de l'électron avant la collision et sa quantique de mouvement.} \\ (E'_{e^-}, p'_{e^-}): \text{ L'énergie de l'électron après la collision et sa quantité de mouvement.} \\ \theta: \text{ L'angle entre la normal et la direction de l'électron diffusé.} \\ \varphi: \text{ L'angle entre la normal et la direction du photon diffusé.} \end{cases}$$

2.1.1 Conservation de l'énergie

Nous avons la relation suivante :

$$E_x + E_{e^-} = E'_x + E'_{e^-}$$

La relation s'écrit compte tenue de l'expression de l'énergie dans le cas d'une particule relativiste :

$$p_x c + m_{e^-} c^2 = p'_x c + \sqrt{p'_{e^-} c^2 + m^2_{e^-} c^4}$$

En isolant $p'^2_{e^-}$, on obtient :

$$p'^2_e = (p_x - p'_x)^2 + 2m_e c(p_x - p'_x)$$

2.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

Nous avons la relation :

$$\overrightarrow{p_x} = \overrightarrow{p'_x} + \overrightarrow{p'_{e^-}}$$

En projettant sur les deux axes, on obtient :

$$\begin{cases} p_x = p'_x \cos(\varphi) + p_{e^-} \cos(\theta) \\ 0 = p'_x \sin(\varphi) - p_{e^-} \sin(\theta) \end{cases}$$

D'ou :

$$\begin{cases} p'_{e^-} \cos(\theta) = p_x - p'_x \cos(\varphi) \\ p'_x \sin(\varphi) = p'_{e^-} \sin(\theta) \end{cases}$$

En élevant les deux équations au carrée et en les additionnants, on obtient :

$$p'_{e^-} = p_x^2 + p'^2_x - 2p_x p'_x \cos(\varphi)$$

2.1.3 Résolution

En soutrayant les deux expressions obtenues pour $p'^2_{e^-}$, on obtient

$$2p_x p'_x(1 - \cos(\varphi)) = 2m_e c(p_x - p'_x)$$

Dans le cas d'un photon, nous avons la relations :

$$\begin{aligned} p &= \hbar k \\ &= \frac{h}{\lambda} \end{aligned}$$

En considérant les relations précédentes, on obtient que

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \lambda' - \lambda \\ &= \frac{h}{m_e c}(1 - \cos(\varphi)) \\ &= \lambda_c(1 - \cos(\varphi)) \geq 0 \end{aligned}$$

Avec λ_c la longeur d'onde Compton.

2.2 Question b

2.2.1 Pour $\varphi = 0$

Pour $\varphi = 0$, il n'y a pas de variation de longeur d'onde, on obtient bien une unique pic dans le détecteur pour $\lambda' = \lambda$.

2.2.2 Pour $\varphi = 45°$

On observe que pour $\varphi = 45°$, nous avons deux pics.

Premier pic

Ce premier pic correspond au cas $\Delta\lambda = 0$. Les rayons X incident font osciller les électrons liés à la matière[A] Ces électrons émettent des photons à la même fréquence que leur fréquence d'exitation et de façon isotrope[B].

Second pic

Ce second pic correspond à la diffusion Compton. Nous l'avons vu, nous avons

$$\lambda' = \lambda_c(1 - \cos(\varphi)) + \lambda$$

2.2.3 Pour $\varphi = 90°$

L'analyse est identique au cas précédent.

2.2.4 Pour $\varphi = 135°$

Premier pic

L'analyse est identique pour le premier pic, sachant que l'émission du au électron est isotrope.

Deuxième pic

L'interpretation reste valable. On obtient un $\cos(\varphi)$ négatif, il s'ajoute donc maintenant au 1, se qui explique que le $\Delta\lambda$ continue à augmenter.

2.3 Question c

Nous avons la relation suivante pour l'énergie des photons diffusé :

$$E'_x = E_x + \Delta E$$

[A] À la fréquence $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$.

[B] Dans toute les directions.

Avec

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \Delta(h\nu) \\
&= \Delta\left(\frac{hc}{\lambda}\right) \\
&= hc\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\
&= hc\left(\frac{1}{\lambda+\Delta\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right) \\
&= hc\frac{-\Delta\lambda}{\lambda(\lambda+\Delta\lambda)}
\end{aligned}$$

D'ou :

$$\begin{aligned}
E'_x &= \frac{hc}{\lambda}\left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda+\Delta\lambda}\right) \\
&= E_x\left(\frac{1}{1+\frac{\Delta\lambda}{\lambda}}\right) \\
&= \frac{E_x}{1+\alpha(1-\cos(\varphi))}
\end{aligned}$$

Avec

$$\alpha = \frac{h\lambda_c}{m_e c}$$

2.4 Question d

Dans le cas des électron de recul, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
E_{e^-} &= E_x - E'_x \\
&= E_x\left(1 - \frac{1}{1+\alpha(1-\cos(\varphi))}\right) \\
&= E_x\frac{\alpha(1-\cos(\varphi))}{1+\alpha(1-\cos(\varphi))}
\end{aligned}$$